Шифр: 11-16

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2019/2020
Ленинградская область

Район Лужский

Школа МОУ СОШ №6

Класс 11

ФИО Фертман Яков Александрович

1	2	3	4	5	Σ
7	7	0	–	–	14

11-16

11.2

Допустим, что мы нашли два набора, которые различны между собой и различны друг в друге. Сложим их. Но перед тем, как складывать, заметим, что у нас образуется 2n различных попарно различных чисел, а минимум их суммы достигается, когда $K_1=1$, $K_2=2$, ... $K_{2n}=2n$, иначе говоря, арифметическая прогрессия с шагом 1 с единицы до 2n. Сумма арифметической прогрессии – $\frac{n(n+1)}{2}$, в нашем случае $\frac{2n(2n+1)}{2}=\frac{4n^2+2n}{2}=2n^2+n$. Но сумма всех чисел равна $2n^2$, что меньше минимально возможного, откуда следует, что хотя бы одно число обязано повториться, ч.т.д.

11.1

В целых числах число 77 получается как $7\cdot 11$, $-7\cdot -11$, $-1\cdot -77$, $1\cdot 77$. Путём перебора:

① $\underbrace{-11, -7, -6, \ldots, 0, \ldots, 7, 11}_{17}$

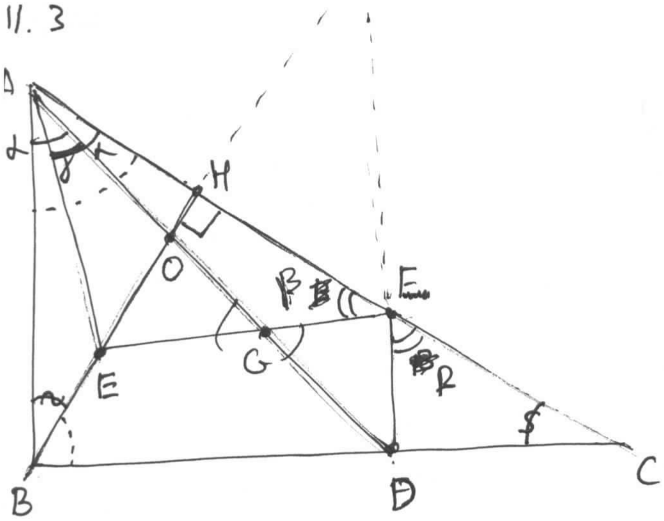
② $\underbrace{-77, -1, 0, 1, 2, \ldots, 7, 11}_{11}$

③ $\underbrace{-77, -1, 0, 1, 77}_{5}$

$\underbrace{-11, -7, \ldots, 0, 1, \cancel{77}, 7}_{\text{аналогично с ①}}$

Ответ: 17

11. 3



11-16

Дано:

$\angle BAD = \angle CAE (= \alpha)$

$\angle AFE = \angle CFD (= \beta)$

BH - высота

ABC - прямоугольный

Д-ть:

$\angle AEF = 90^\circ$, или $\angle\alpha + \angle\beta = 90^\circ$

Решение: высота делит прямоугольный треугольник на два подобных $\Rightarrow$ $\angle BAC = \angle HBC$ и $\angle ABH = \angle BCH$. Обозначим $\angle EAD$ за γ.

$\angle ABH = \angle BCH = \frac{\pi}{2} - (2\alpha - \gamma)$ $\quad \angle DAC = \alpha - \gamma$ $\quad \angle ADC =$

$= \pi - \left(\frac{\pi}{2} - (2\alpha - \gamma)\right) - (\alpha - \gamma) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha + \gamma\right) - \alpha + \gamma =$

$= \frac{\pi}{2} + \alpha$ $\quad | \quad$ $\angle AEF = \pi - \angle EAF - \angle EFA$ $\quad \angle EAF = \alpha$

$\angle EFA = \frac{\pi}{2} - \angle HEF$ $\qquad \angle HEF = \pi - \angle BOD - \angle AGE = \frac{\pi}{2} - \beta$

$\beta = \angle BOD + \angle AGE - \frac{\pi}{2}$

$\angle HBC = \angle BAC = 2\alpha - \gamma$ $\qquad \angle ADB = \pi - \angle ADC = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha$

$\angle BOD = \pi - (2\alpha - \gamma) - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \pi - 2\alpha + \gamma - \frac{\pi}{2} + \alpha = \frac{\pi}{2} + \alpha + \gamma$

$\angle AGE = \angle EGD = 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha + \gamma\right) - (\pi - \beta) =$

$= -\alpha + 2\alpha - \gamma + \beta = \alpha + \beta - \gamma$ $\qquad \angle BOD = \frac{\pi}{2} + \beta - \beta + \gamma - \alpha =$

$= \frac{\pi}{2} + \gamma - \alpha$ $\qquad \angle OBD = \pi - \angle BOD - \angle ODB = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \gamma - \alpha\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$

$= -\gamma + \alpha + \alpha = 2\alpha - \gamma$ $\qquad \angle DCA = -\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - (\alpha - \gamma) + \pi = \frac{\pi}{2} - 2\alpha + \gamma$

Шифр: 2-11-03

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2019/2020

Ленинградская область

Район Лужский

Школа МОУ СОШ №6

Класс 11

ФИО Фертман Яков Александрович.

2-11-03

6	7	8	9	10	Σ
7	0	0	X	0	7

11.10

Ответ: 7.

Решение: докажем, что меньше 7 получить ответ гарантированно нельзя. Запишем $f(x) = ax^2+bx+c$ и $g(x) = dx^2+ex+f$. Имеем 6 неизвестных: a, b, c, d, e и f. Но нам нужно найти только 3 из них. Отсюда, нужно решить одно из уравнений, но чтобы его решить, необходимо 3 ~~корня~~ ответа. Гарантированно это число появится после 5 ответов, ибо там варианты: ⁝, ⁝, ⁝, но решить его невозможно. Необходимо проверить ответ на одном ответе, которого ещё не было, а ещё один ответ гарантированно появится только за 7 ходов, т.к. варианты: ⁝ ⁝ ⁝ ⁝ ⁝. Далее перебором устанавливаем хотя бы один многочлен.

11.6. Функции, которые при $x<0$ всегда ≤ 0, а при $x>0$ всегда ≥ 0, имеют члены только нечётной степени, т.к единственный другой вариант получить $f(x) \leq 0$ при $x>0$ — иметь нечётную степень ниже чётной, вроде x^4+x^3. До значения $\{-1\}$ эта функция действительно будет неположительной, но потом, т.к. x^4 растёт быстрее x^3 (по модулю), функция начнет ~~положительных~~ рост в положительном поле значений. "+1" в конце тоже сдвинет переход значений из положительных в отрицательные и наоборот, следовательно, от +1, как и от чётных степеней в функции, необходимо избавиться. Один из вариантов: получить перемножением функции из ряда

x^3+x^2+x+1, x^4+x^3+x+1, $x^5+x^3+x^2+1$, x^5+x^4+x+1, $x^6+x^4+x^2+1$, $x^7+x^4+x^3+1$ и
$-(x^2+1)$, $-(x^4+1)$, $-(x^2+1)$, $-(x^4+1)$, не подойдут, $-(x^4+1)$

1

вычитанием получим функции, которые при $x<0$ также ≤ 0,

а при $y > 0$ тоже $\neq 0$. Пример получения нужного, что требовалось привести.
(Отсылаясь к выводу ранее, x^n, $n \vdots 2$ растет быстрее $x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3}$ $\Leftarrow 2 > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \frac{1}{2^{n-1}}$)
поделим неравенство на x^{n-1} и x приравняем 2

$x > 1 + \frac{1}{x} + \dots \frac{1}{x^{n-1}}$

$x \geq 2$

11. 7.

2-11-03

~~Ответ. можно.~~

~~Решение: разделим наши числа на 5 групп, кроме 1: числа вида $\underline{4k+1}$, $\underline{4k+2}$, $\underline{4k+3}$, вида $\underline{2^n}$ и вида $4k$, но не включающие в себя 2^n, $n \geq$ ~~. Очевидно сразу, что числа вида 2^n между собой не могут дать в сумме 2^n, ($2^k + 2^n = 2^k(2^{n-k}+1) \neq 2^m$). Также и $4k+3$: $4k+3+4l+3 = 4(k+l+1)+2$, может давать степень только при $k+l+1=0$, но $k, l > 0$, $k \neq l$, отсюда между собой нужную сумму они не дадут. $4k+1$ аналогично: ($4k+1+4l+1 = 4(k+l)+2$, $k+l=0$, но $k \neq l$; $k, l > 0$) С $4k+2$ выводим зависимость: $4k+2+4l+2 = 4(k+l+1)$, $\Rightarrow$ чтобы сумма была 2^n, $k+l+1 \vdots 2 \Rightarrow k+l \not\vdots 2$, отсюда k и l либо оба чётные, либо оба нечётные, а это значит, что мы кладем подгруппы $4k+2$, $k \vdots 2$ и $4k+2$ $k \not\vdots 2$ в разные раскраски. ~~Далее сумма~~ С $4k$ между собой~~

11. 8.

$\frac{\sin x + \cos y}{\cos x + \sin y}$ — >0, рац. Перемножим. $\sin x \sin y + \sin x \cos x + \cos y \sin y + \cos y \cos x$ — >0, рац, отсюда они либо все рациональные, либо сумма их иррациональных частей результирует в 0.
если они рациональные, то выделяем $(\sin x + \cos y) \cdot \cos x$ и $(\sin y + \cos x) \sin x$, где часть в скобках и сумма — рац. числа, и для них может подобрать m и n, соответствующие условию. Если же они иррац., то нужно доказать рациональность суммы $\sin x \cos x + \cos y \cos x$ и $\sin x \sin y + \sin x \cos x$. Выразим: $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$; $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$; $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$; $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y}$. Сумма корней - рац. число, когда они рав-

ны 0, либо равны друг другу, но с разными (варианты корней с ~~комплексной~~ мнимой единицей)
из корня вылезает рациональное значение. В 1 случае ~~[illegible]~~ все подкоренные функции принимают значение 1, что невозможно ($\sin^2 x + \cos^2 x = 2$ и т.д.), во 2 случае функции будут обратны друг другу по знаку, что приведет к 0 в скобках, либо равны друг другу, ~~не~~ тогда ~~это~~ появляется тот же 0. В 3 случае всё нам подходит, т.к. значения рациональны, следовательно, и те скобки рациональны. Все три исхода показаны и дают удовлетворяющий результат, следовательно, ~~всегда~~ найдутся такая пара чисел m и n (или знаменатель кратен им), равная знаменателям в рациональных представлениях $\sin x$ и $\cos x$, что $m\sin x + n\cos x$ — натуральное число

№ 7.

Ответ: можно.

Решение:

2-11-03